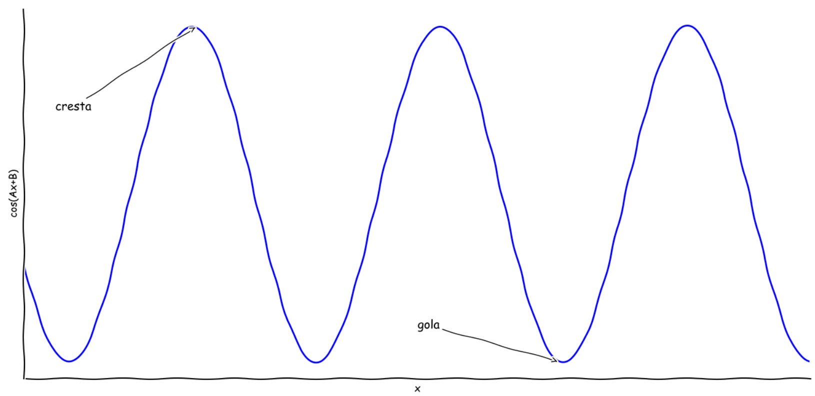
1 La diffrazione della luce

1.1 Concetti base

Per comprendere che cosa sia la diffrazione e come si verifichi, occorre conoscere alcune cose riguardo la luce e le sue proprietà. Prima di tutto, la luce è radiazione elettromagnetica e può essere descritta utilizzando vari modelli fisici, a seconda della sua caratteristica che volessimo sottolineare o della sua precisa proprietà che volessimo analizzare. Per i nostri scopi, potremo descrivere la luce come un'onda. Essendo di natura **e**lettromagnetica, si utilizza di solito la lettera "E" per indicarne l'ampiezza.



Esempio di onda periodica

In generale potremo scrivere:

$$E(x,t) = Ecos(kx - \omega t)$$

dove:

- E è ampiezza dell'onda;
- $cos(kx - \omega t)$ è la funzione coseno, che descrive l'oscillazione periodica dell'onda;
- k è il numero d'onda. E' un indice della periodicità spaziale del fenomeno: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, dove λ è a lunghezza d'onda, ovvero la distanza tra due creste (o due gole) succcessive;
- x è lo spazio. Stiamo considerando un'onda monodimensionale;
- ω è la pulsazione. E' indice della periodicità temporale del fenomeno: $\omega = \frac{2\pi}{T}$, dove T è il periodo temporale;
- t è il tempo.

Con questo semplice modello è possibile studiare un sacco di proprietà della luce, cosiddette "ondulatorie". E' forse noto che un tempo in cui il dibattito riguardo la natura della luce fu molto acceso. Noi stiamo dicendo che la luce è un'onda, che oscilla nello spazio e nel tempo, trattabile con la formula descritta sopra. Però molti hanno di certo sentito il termine "fotone": che cosa è questo, se non una "particella" di luce?

Ebbene basti dire questo: la luce è la luce. Il "modello fisico" con cui tentiamo di descriverla (con cui tentiamo di descrivere qualunque cosa) risente di tantissimi fattori. E' vero che la luce possiede delle proprietà di onda e nel contempo delle proprietà di particella. Teorie molto avanzate hanno tentato (con ottimi risultati) il connubio tra le due rappresentazioni. Qui siamo interessati a particolari proprietà che possono essere ben descritte considerando la luce come un'onda: per il livello di dettaglio che ci interessa, questo è più che sufficiente ed i risultati predetti saranno molto precisi.

1.2 Diffrazione

Quando la luce incontra un'apertura di dimensioni paragonabili alla propria lunghezza d'onda, allora si verifica il fenomeno della diffrazione: l'onda "interferisce" con se stessa a causa del passaggio attraverso quell'apertura e crea dei disegni, delle forme, che dipendono direttamente da ciò che ha attraversato.

Affinché questo fenomeno sia ben visibile, occorre utilizzare una sorgente luminosa dotata di coerenza e monocromatica: questo, a grandi linee, significa avere un'onda che non vari casualmente nello spazio o nel tempo e che abbia un colore solo. Quest'ultima caratteristica è importante proprio a causa della definizione di diffrazione: il colore dipende direttamente dalla lunghezza d'onda, che sappiamo giocare un ruolo fondamentale.

La teoria diffrazione ha fondamenti matematici molto complessi, tuttavia è possibile arrivare ad una formulazione semplice se si rispetta una richiesta molto facile: bisogna lasciare propagare la luce, dopo l'apertura, per una distanza z molto maggiore di un rapporto:

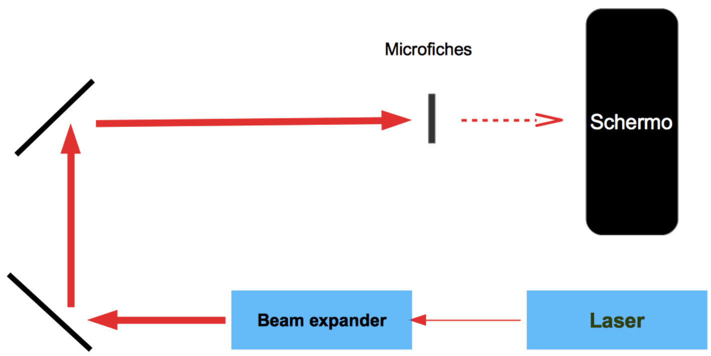
$$z >> \frac{\pi L^2}{\lambda}$$

Con questa approssimazione, si arriva facilmente a scrivere l'intensità del profilo di diffrazione, cioè la distibuzione della luce su uno schermo dopo l'apertura diffrattiva, nel modo seguente:

$$I(x_2, y_2) \propto |U(\xi, \eta)|^2$$

dove $U(\xi, \eta)$ non è altro che la trasformata di Fourier del profilo di diffrazione, cioè dell'apertura attraverso cui abbiamo fatto propagare l'onda. Da qui deriva la grande utilità che ha per noi la trasformata e il grande aiuto che ci può offrire nello studiare tutti i profili di diffrazione che ci interessano. Attraverso la tabella di sezione 6.2 è possibile predire i disegni di diffrazione che ci aspetteremmo, noto il profilo disegnato sulle microfiches.

1.3 Setup



Il setup con cui osservare questi pattern di diffrazione è composto da un laser He-Ne (Elio-Neon) che fornire una luce a lunghezza d'onda di circa 633nm. Questa attraversa un beam expander il cui scopo è quello di allargare leggermente il fascio. Due specchi la dirigono quindi verso le microfiches e il pattern risultante è osservato su uno schermo.

1.4 Svolgimento esperienza

Verranno mostrati diversi profili di diffrazione stampati di micrfiches e visualizzati su uno schermo. Sarà possibile verificare la forma delle trasformate elementari, non che le loro proprietà (in particolare la proprietà di scaling, il principio di sovrapposizione).

1.4.1 Verifica quantitativa dell'esperimento di Young

L'esperimento della doppia fenditura di Young è il classico esperimento che viene descritto quando si iniziano a trattare diffrazione ed interferenza. In questo caso è possibile verificare la validità delle leggi teoriche. Da queste emerge che (se L >> d):

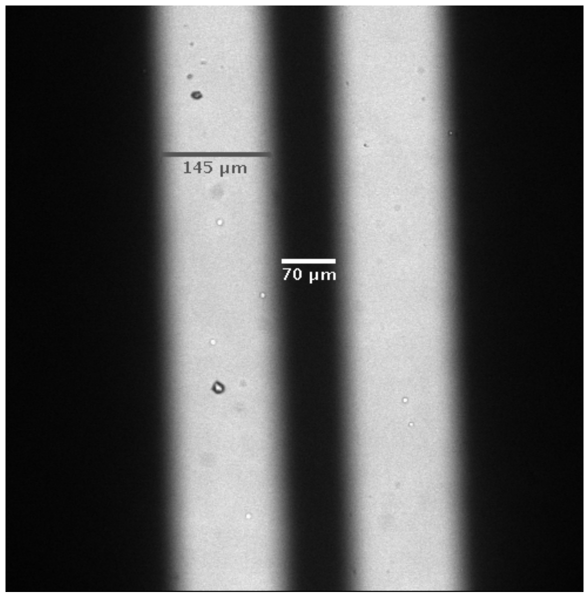
$$\lambda \sim \frac{d \cdot x}{L}$$

dove:

- d è la distanza tra le fenditure;

- x è la distanza tra due massimi consecutivi;
- L la distanza dello schermo dalla doppia fenditura.

La figura seguente, ottenuta con un microscopio ad alta risoluzione, mostra le caratteristiche delle aperture:



1.4.2 Analisi pattern diffrattivi

Sono state preparate diverse micrifiches per avere a disposizione diversi pattern di diffrazione. Per i più elementari sarà sufficiente l'utilizzo della sorgente laser senza alcun accorgimento, mentre per quelli più estesi si ricorrerà all'impiego di un beam expander, come da schema.

Tra i pattern più significativi incontriamo:

- singola fenditura quadrata;
- singola fenditura circolare;
- il numero "5" e le linee elementari che lo compongono (principio di sovrapposizione);
- pattern di fenditure quadrate;
- pattern di fenditure circolari;
- doppia elica di DNA (schematizzata).

INTRODUZIONE ALL'ANALISI DI FOURIER

L'analisi di Fourier è un metodo che consente lo studio dei segnali, normalmente ottenuti nel "dominio nei tempi", nel "dominio delle frequenze". Questo significa cambiare punto di vista, andare ad osservare caratteristiche e comportamenti che possono sembrare inizialmente nascosti ai nostri occhi, e trovare un filo rosso, un leitmotive che ci era in partenza oscuro, nascosto.

Per comprendere la portata di ciò che è insito nell'analisi di Fourier, occorre avere ben presenti alcuni concetti.

2 Basi

La "base" è un concetto matematico estremamente utile, che viene continuamente utilizzato in ogni campo, spesso incosciamente.

Quando contiamo, per esempio, diciamo ogni numero in base 10. Si chiama "base 10" perché ogni cifra è in realtà il numerino che moltiplica una potenza di 10:

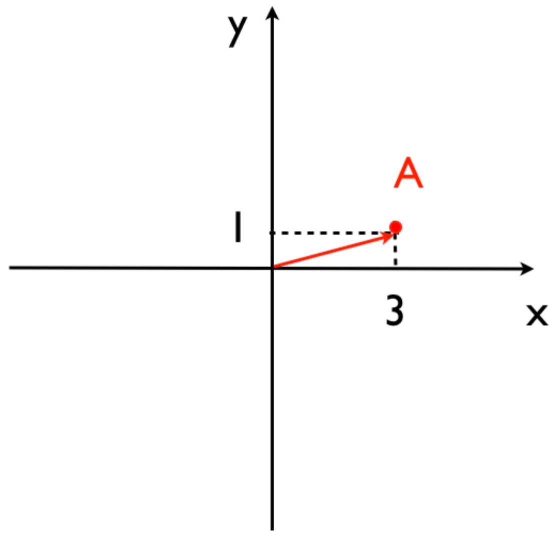
$1524 = 4 \times 10^0 + 2 \times 10^1 + 5 \times 10^2 + 1 \times 10^3 + 0 \times 10^4 + 0 \times 10^5 + ...$

L'insieme infinito di potenze di 10 è la nostra *base di numerazione*.

Ovviamente è possibile esprimere i numeri in base 2, cioè solo con zeri ed uni, così come fanno i computer. Pure è chiaro che esistono un sacco di regole per passare da una base di numerazione ad un'altra.

Questo concetto è molto potente e profondo e trova nella geometria un rapido impiego, visivamente ed intuitivamente accettabile.

Quando disegnamo su un foglio, ci è ben chiaro che stiamo lavorando in 2 dimensioni. Ma che cosa vuol dire? Vuol dire che sono sufficienti 2 numeri per dirci dove siamo: le coordinate del punto. Ma le coordinate sarebbero nulla senza una base, cioè senza i due assi cartesiani.



Volendo essere un attimino più formali: il punto $A = (3, 1)$ è in realtà esprimibile come $A = 3 \times \hat{x} + 1 \times \hat{y}$.

Le lettere $\hat{x}$ ed $\hat{y}$ indicano i versori (cioè vettori di lunghezza 1) dei due assi coordinati. La generica combinazione: $a \cdot \hat{x} + b \cdot \hat{y}$ con $a, b \in R$ permette di scrivere un qualunque punto dello spazio. Questo concetto si esprime dicendo che: ogni punto del piano è esprimibile con una combinazione lineare dei due vettori, che quindi formano una BASE.

BASE = insieme (minimale) di versori con cui è possibile esprimere qualunque punto del piano.

Possiamo utilizzarne un'altra? Certo che sì! Magari una meno comoda, una con gli assi storti per esempio oppure le (probabilmente note) coordinate polari. Sono diversi set di versori che permettono, grazie ad una certa combinazione con due numeri particolari, di poter indicare OGNI PUNTO DELLO SPAZIO.

E' certamente possibile definire dei cambiamenti di base e passare da una base ad un'altra, cioè da un sistema di riferimento ad un altro. Sono esercizi che si svolgon in genere sia in corsi di geometria sia in corsi di fisica.

Quando parliamo di **funzioni**, le stesse idee possono essere riprese ed espanse. Cercheremo nel prossimo paragrafo di illustrare, per sommi capi, le linee guida che mostrano come l'analisi in serie e trasformata di Furier offra uno strumento estremamente potente.

3 Serie di Fourier

Prendiamo delle funzioni, per semplicità di una sola variabile, ma ogni concetto può essere poi esteso anche funzioni vettoriali. Quindi abbiamo una certa $f(x)$. Come i punti di prima vivevano in uno spazio bidimensionale, così, per astrazione, potremmo dire che anche tutte le funzioni di una variabile hanno un loro spazio, un luogo astratto in cui esistono. Non è uno spazio rappresentabile geometricamente in maniera utile, come può essere quello dei punti 2-D, ma immaginiamo che esista. Ci chiediamo se possa esistere un analogo dei versori, cioè se possano esserci dei mattoncini fondamentali la cui combinazione lineare ci permetta di formare una qualunque funzione. La risposta, alla fine, risulterà essere sì. Ma andiamo con calma e restringiamoci, per ora, alle funzioni periodiche di periodo 1, cioè tali per cui: $f(x+1) = f(x)$ (in genere è sufficiente armeggiare un po' con una qualunque funzione periodica affinché mostri un periodo unitario). L'unica richiesta che facciamo è che siano a quadrato integrabile, cioè:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < +\infty$$

Questa è una richiesta minima, fisicamente equivale a richiedere che il segnale che stiamo analizzando abbia energia finita. Una cosa piuttosto ragionevole, senza entrare in dettagli matematici troppo complessi, dovuti principalmente all'estensione del concetto di integrale di Lebesgue.

Bene: se le nostre funzioni rispettano le due richieste, allora possiamo dire che appartengono ad un certo "spazio", in genere definito $L^2[0,1]$ (funzioni a quadrato integrabile definite tra 0 e 1). Il punto di partenza dell'analisi di Fourier consiste nell'affermare che esiste un *sistema ortonormale completo* (questa non è che un'altra definizione, più formale, di *base*) in questo spazio. Le parole chiave sono:

- ORTONORMALE = i mattoncini sono ortogonali e normati, cioè hanno modulo = 1 e sono tra loro perpendicolari (il prodotto interno tra due mattoncini diversi è sempre nullo). Esattamente le proprietà che hanno i versori $\hat{x}$ ed $\hat{y}$ del piano;
- COMPLETO = ogni funzione dello spazio può essere espressa da una combinazione lineare di questi mattoncini.

Ora si introduce una leggera astrazione in più: questa base, cioè questo insieme di versori strani, è anche infinito. Si può dimostrare che servono un numero infinito di elementi di base per poter scomporre in mattoncini elementari un qualunque segnale che sia discontinuo o non differenziabile. E' per questa ragione che si parla di serie di Fourier (e non di "somme" di Fourier, essendo le serie null'altro che somme infinite).

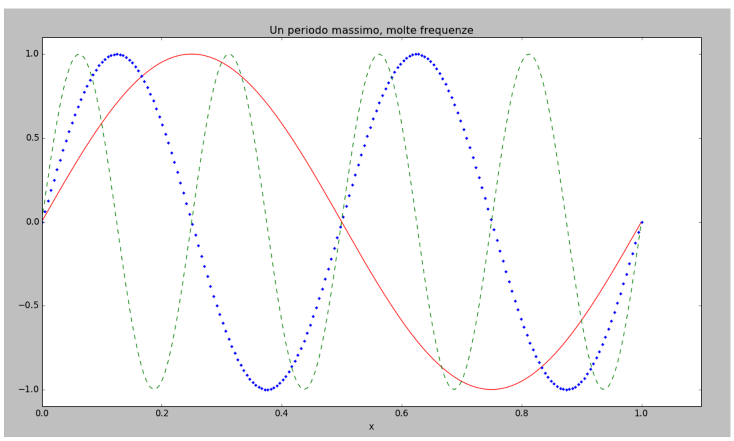
Questo sistema ortonormale completo è composto da *funzioni esponenziali complesse*, che derivano da *seno* e *coseno*. Vediamo un attimo come si arriva a questo.

3.1 La base degli esponenziali

L'idea è esprimere un segnale periodico come composto da piccoli mattoncini elementari, anch'essi periodici. I segnali periodici più semplici in assoluto sono le funzioni seno e coseno.

Sono funzioni definite grazie alla più semplice periodicità spaziale: un cerchio centrato nell'oridine e di raggio 1. Il coseno rappresenta l'ascissa di un punto che ha percorso un certo angolo a partire dal semiasse positivo delle ascisse, il seno ne rappresenta invece l'ordinata.

Un concetto molto importante è quello di "un periodo, molte frequenze".



Si vede che tutte le funzioni hanno periodo 1, ma il seno rosso ha solo periodo uno, il seno blu ha periodo fondamentale 1/2, mentre quello verde 1/4, fornendo così più rapide variazioni.

Preso un singolo seno, nella maniera più generale possibile, si può mostrare in pochi passaggi da dove derivi la rappresentazione esponenziale, così come altri modi con cui scrivere la serie di Fourier.

Nella maniera più generale, un seno può essere scritto come:

$$sin(2\pi kt + \phi_k)$$

dove $2\pi kt$ è l'argomento vero e proprio ($k \in \mathbb{Z}$) mentre ϕ_k è lo sfasamento iniziale (ipotizzando possa non partire da 0 al tempo 0).

Con le formule di addizione si perde la fase iniziale:

$$sin(2\pi kt + \phi_k) = sin(2\pi kt)cos(\phi_k) + cos(2\pi kt)sin(\phi_k)$$

$cos(\phi k)$ e $sin(\phi_k)$ sono due numeri. Così si arriva a scrivere la serie di Fourier nel modo più semplice e molto diffuso:

$$\sum_{k=1}^{N}(a_k cos(2\pi kt) + b_k sin(2\pi kt))$$

La rappresentazione con gli esponenziali complessi risulta però migliore, perché più compatta e molto più facile da gestire nei calcoli.

$$cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \qquad sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-i2}}{2i}$$

Così:

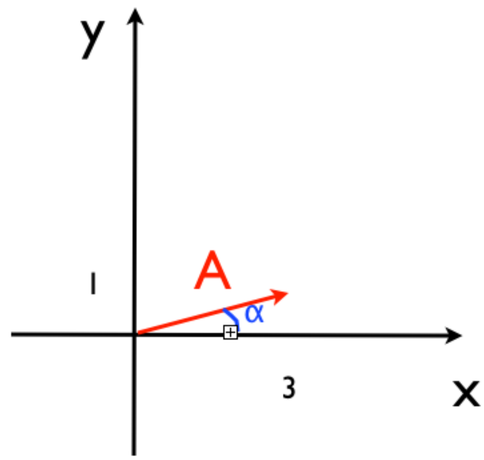
$$\sum_{k=-n}^{+n} c_k e^{-2\pi ikt}$$

Se i coefficienti verificassero la proprietà di simmetria $c_{-k} = \bar{c}_k$ allora il segnale sarebbe reale. Bisogna sincerarsi di questo, volendo essere matematicamente precisi: infatti prendiamo in prestito una notazione comoda che sfrutta numeri complessi, ma se stessimo analizzando un segnale reale allora sarebbe solo un artificio e la condizione precedente ci assicurerebbe di non fuggire da $\mathbb{R}$.

La domanda fondamentale è: possiamo scrivere una funzione con la sommatoria introdotta? In che modo possiamo trovare i coefficienti c_k che per ora sembrano solo dei numeri nelle formule senza significato particolare?

3.2 I coefficienti di Fourier

Ritorniamo per un attimo all'analogia col piano cartesiano.



Lo spazio potrebbe essere osservato dal punto di vista degli spazi vettoriali: i vettori bisimensionali vivono nel nostro piano e possiamo rappresentarli con coppie di numeri grazie agli assi cartesiani. Se conoscessimo solo il modulo del vettore e l'angolo, potremmo trovare la x e la y?

Certamente, sarebbe sufficiente utilizzare le solite formule e potremmo esprimere il vettore come:

$\overrightarrow{A} = Acos(\alpha) \cdot \hat{x} + Asin(\alpha) \cdot \hat{y}$

Guardiamo bene la formula: i versori della base sono linearmente composti per fornirci il nostro vettore; i coefficienti sono dati da regole ben note dalla geometria elementare.

Questo è esattamente lo stesso ragionamento nel caso delle serie di Fourier: invece di vettori abbiamo funzioni; invece di basi di versori abbiamo la base ad esponenziali complessi, cioè a funzioni elementari seno/coseno; invece della regola geometrica per trovare i coefficienti abbiamo un procedimento un po' diverso, ma che arriva allo stesso risultato.

3.2.1 Troviamo i coefficienti

In genere in matematica si parte sempre dicendo: "Poniamo il caso di poter scrivere questa cose e ragioniamoci sopra". Noi scriviamo la serie di Fourier, prendiamola per buona, e utilizziamo algebra e calcolo per vedere che forma dovrebbero posserede i vari coefficienti:. Quindi supponiamo di poter scrivere una funzione con una serie di Fourier:

$$f(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{2\pi ikt}$$

Cerchiamo di isolare un coefficiente, per poterlo trovare:

$$f(t) = ... + c_m e^{2\pi imt} + ...$$

$$c_m e^{2\pi imt} = f(t) - \sum_{k\neq m} c_k e^{2\pi ikt}$$

Moltiplicando entrambi i lati per l'esponenziale negativo (per avere solo il coefficiente a sinistra) si trova:

$$c_m = f(t)e^{-2\pi imt} - \sum_{k\neq m} c_k e^{2\pi ikt} e^{-2\pi imt}$$

Concluse le possibilità dell'algebra, ci rivolgiamo al calcolo: integrali e derivate. Qui funziona integrare:

$$\int_0^1 c_m dt = c_m = \int_0^1 f(t)e^{-2\pi imt}dt - \sum_{k\neq m} c \int_0^1 e^{2\pi i(k-m)t}dt$$

L'integrale della sommatoria si annulla (si vede immediatamente svolgendolo e ricordando le proprietà di seno e coseno). Quindi rimaniamo con il risultato:

$$c_m = \int_0^1 f(t)e^{-2\pi imt}dt$$

Può tornare utile prendere in prestito la notazione in "bra" e "ket" della meccanica quantistica: permette di nascondere troppi segni e particolarità, per concentrarsi più sui concetti "a grana grossa". Senza voler essere eccessivamente formali, potremmo dire che, data una funzione, la stiamo espandendo su una base che potremmo indicare così:

$$|e_k >= \{e^{2\pi ikt}\}_k$$

Quindi, quello che stiamo facendo con Fourier, è espandere una funzione sulla base degli esponenziali, e con un "braket" si potrebbe scrivere semplicemente:

$$f(t) = |e_k >< e_k|f(t) >$$

$$\text{essendo } < e_k| = \{e^{-2\pi ikt}\}_k$$

Questa è una notazione molto utilizzata in meccanica quantistica: è compatta e comoda, una volta fatta l'abitudine.

4 RIASSUNTO RISULTATI

Ogni funzione periodica può essere espressa come somma di componenti elementari grazie alle serie di Fourier. Si può operare un'analisi di un segnale scomponendolo in componenti elementari.

L'unica richiesta è che sia a quadrato integrabile. In sintesi, si può scrivere:

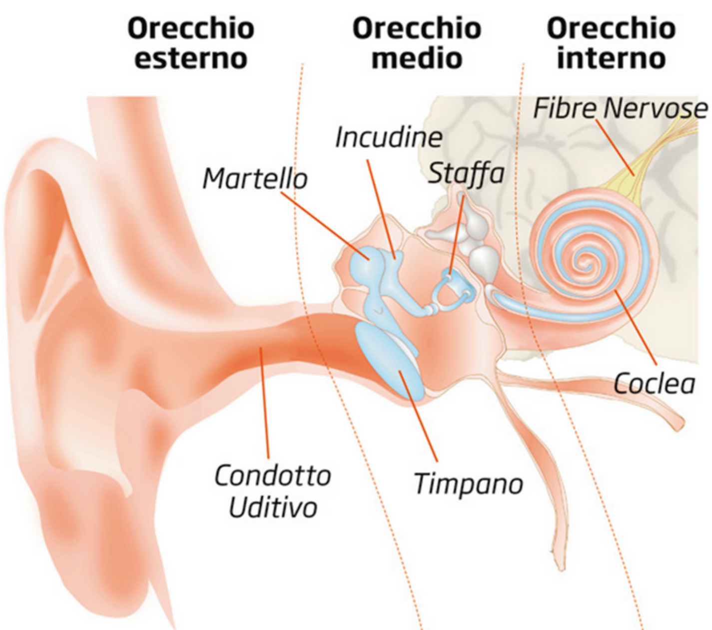
$$f(t) \in L^2[0,1] \Longrightarrow f(t) = |e_k >< e_k|f(t) >= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{2\pi ikt}$$

$$|e_k >= \{e^{2\pi ikt}\}_k \, , \; < e_k| = \{e^{-2\pi ikt}\}_k$$

$$\hat{f}(k) = k - esimo \, coeff. \, di \, Fourier = \int_0^1 f(t)e^{-2\pi ikt}$$

5 Sono cose vere?

Strano ma vero: il nostro orecchio sente grazie al fatto che le serie di Fourier funzionano.



La coclea è in grado di distinguere le frequenze percepite in un modo molto ingegnoso: ogni gruppo di cellule ciliate (che alloggiano nella parte interna della spirale) risponde meglio a una particolare frequenza dello spettro udibile a seconda della sua posizione nella spirale. Percorrendola, sono sempre più sensibili alle alte frequenze. Quindi è come se l'orecchio campionasse i segnali in pressione andando a guardare i pesi delle varie frequenze, cioè i pesi dei vari seno e coseno che compongono la generica funzione che ascoltiamo, cioè automaticamente "calcolando" i coefficienti di Fourier.

Il cervello riesce a risalire al suono attraverso le frequenze (i "mattoncini") che lo compongono, operando quindi in serie di Fourier. Questa è una finta "serie": non abbiamo infinite cellule, non possiamo apprezzare infinite frequenze! Ecco spiegato perché l'uomo può sentire solo in un certo intervallo di suoni, nè troppo lenti nè troppo veloci. Altri animali sono in grado di apprezzare porzioni diverse dello spettro sono ovviamente, come ad esempio i pipistrelli, che utilizzano ultrasuoni per orientarsi.

6 Esempio programma JAVA (troncamenti e pesi)

E' possibile sfruttare un programma JAVA che mostra come sia possibile approssimare sempre meglio un segnale aumentando il numero di termini delle serie di Fourier utilizzate. E' reperibile all'indirizzo:

`https://drive.google.com/folderview?id=0B8B9d2LsyXlcWFlFN0FHaFFMc2M&usp=sharing`

Scaricando in una carella tutti i files e cliccando due volte sul file ".jar" si avvia il programma. L'utilizzo è molto intuitivo.

Ricordiamo che una qualunque discontinuità nella funzione richiederà un numero infinito di termini nella serie affiché l'uguaglianza sia valida.

7 La trasformata di Fourier

Ricordiamo l'inizio della discussione: prendiamo funzioni periodiche di periodo 1 e...

Ma chiaramente non possiamo lavorare sempre con funzioni periodiche! Come possiamo fare per avere un metodo più generale, applicabile ad altri casi?

E' possibile utilizzare uno strumento simile alle serie di Fourier per studiare fenomeni non periodici? Certamente sì. Intuitivamente si potrebbe ricordare i passaggi che portano all'introduzione dell'integrale: il simbolo stesso $\int$ non è altro che una "$\sum$" un po' rivisitata, se ci pensiamo. Calcolare l'area sottesa da una curva è, in prima approssimazione, una somma di tante piccole aree rettangolari, così come si spiega quando si introduce il concetto di integrale secondo Rienmann. Più o meno si opera un procedimento simile quando si voglia passare dalle serie alla trasformata.

Funzione non periodica = limite di una funzione periodica per T (periodo) che tenda all'infinito.

I mattoncini di base che si utilizzano ora sono: $e^{2\pi ik(\frac{t}{T})}$.

Si introduce una "nuova" variabile, cioè passiamo dalla k ad una s continua: $s = \frac{k}{T}$, $T \to \infty$.

La trasformata di Fourier è il caso limite dei coefficienti di Fourier per le serie: opera un'ANALISI del segnale.

La trasformata inversa è il caso limite della serie di Fourier: opera una SINTESI dei mattoncini fondamentali.

La trasformazione (non più "serie" da qui in avanti) avviene in questo modo: si parte da una funzione e si seguono (per quanto ci riguarda) una serie di regole per passare ad una nuova funzione di una nuova variabile (la frequenza) che contiene quello che si chiama "spettro del segnale". Formalmente:

$trasformata = F.T.(f(x)) = F(s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi ist} f(t)dt$

$trasformata\ inversa = I.F.T.(F(s)) = f(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi ist} F(s)ds$

Importante da tenere presente è quale variabile, nei due casi, è muta: l'integrale in "dt" cancella la t dal risultato e crea una funzione che dipende solo da s. Accade esattamente il contrario per la trasformata inversa. Ricordiamo inoltre che la variabile "s" ha dimensioni inverse a "t". In particolare, se t fosse un tempo, alloe s sarebbe una frequenza nel senso comune del termine, cioè la misureremmo in Hertz. Se invece di t, partissimo da x in metri, avremmo una s in unità di inverso del metro, dette "frequenze spaziali".

Volendo entrare un po' di più nel dettaglio per avere un'immagine più generale in mente, potremmo ricordarci della DERIVATA.

La derivata è precisamente un OPERATORE che agisce su una funzione e ci fornisce una nuova funzione. Non ci serve ogni volta stare a ripetere la definizione:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

ma abbiamo una serie di regole e di derivate elementari che ci possono aiutare ad arrivare ad una soluzione in maniera rapida e senza troppi conti.

Questo succede anche con la trasformata di Fourier. Anch'essa è un operatore (lineare) che prende una funzione e ce ne fornisce un'altra, cambiandone la variabile. Ci sono una serie di regole di base e trasformate elementari che può essere utile ricordare, nel caso vi si volesse lavorare, per potere avere un'idea, almeno approssimativa, dell'aspetto di una trasformata, senza fare tutti i conti ogni volta, che ad ogni modo possono essere svolti con appositi programmi o per via numerica al computer.

7.1 Regole elementari

Il segnale inverso è definito da: $f(-t) = f^-$

Valgono ovviamente:

- $f\ pari \Rightarrow f^- = f$
- $f\ dispari \Rightarrow f^- = -f$

Allora possiamo riassumete la proprietà con:

$\mathcal{F}(f^-) = \mathcal{F}^{-1}(f)$

$\mathcal{F}(\mathcal{F}(f)) = f^-$

In pratica questo significa che se partissimo da una funzione pari, ne facessimo la trasformata, trasformassimo ancora una volta, alla fine torneremmo esattamente alla funzione di partenza come se nulla fosse.

Ritardo (shitfing/delay)

Un segnale ritardato di una quantità b è scritto come: $f(t) \rightarrow f(t-b)$.

Il ritardo su ripercuote sulla trasformata in questo modo:

$f(t \pm b) \longleftrightarrow e^{\pm 2\pi ist} F(s)$

Risalamento (scaling)

Un segnale è riscalato (cioè ristretto od allargato) se: $f(t) \rightarrow f(at)$.

La trasformata modifica l'operazione di scaling sulla funzione elementare in questo modo:

$f(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} F(\frac{s}{a})$

Si può osservare una caratteristica molto importante: se $a > 1$ la funzione risulta compressa nel dominio dei tempi, mentre la sua trasformata (nel dominio delle frequenze) si allarga: se $a < 1$ accade esattamente il fenomeno opposto.

Derivata

Semplicemente, la derivata n-esima si tramuta in una moltiplicazione, in questo modo: $f^{(n)}(t) \longleftrightarrow (2\pi is)^n F(s)$

7.2 Trasformate elementari

La seguente tabella può essere utilizzata per predire il pattern di intensità dato da una certa apertura, nel caso dello studio sulla diffrazione che segue. Tutti i risultati sono ottenuti applicando la definiizone (così come accade nel caso della derivata):

$f(x)$	$F(\xi)$
$Gaus(x)$	$Gaus(\xi)$
$rect(x)$	$\frac{sin(\pi\xi)}{\pi\xi} = sinc(\xi)$
$circ(x)$	$somb(\xi)$
$\delta(x)$	1
$comb_T(x)$	$\frac{1}{T}comb_{\frac{1}{T}}(\xi)$

8 Risorse

8.1 Il laser He-Ne

Un'utile spiegazione (per lo più qualitativa) si trova banalmente su Wikipedia:
`http://it.wikipedia.org/wiki/Laser_a_elio-neon`